Problema 1: La red social. En un pueblo con $12k$ habitantes, cada uno conoce a $3k+6$ convecinos y el conocimiento es mutuo. Existe un entero positivo n tal que, para cada pareja de habitantes, el número de personas que conocen a ambos es n. ¿Cuántos habitantes hay en el pueblo?

Solución: Vamos a obtener una condición equivalente al enunciado del problema. Para ello, consideremos un grafo con tantos vértices como habitantes, en el que dos de aquellos están unidos por una arista si y sólo si sus vecinos asociados se conocen. Traduciendo las hipótesis sobre el conocimiento mutuo en el pueblo, deducimos que el grafo tiene $12k$ vértices, de cada vértice parten $3k+6$ aristas, y además, para cada pareja de vértices distintos, existen siempre n posibles caminos por aristas entre uno y otro de longitud dos. Contemos bien estos caminos.

Por un lado, habrá tantos caminos (teniendo en cuenta la orientación) como la cantidad de vértices por el número de aristas que salen de cada uno de ellos al cuadrado, es decir, $12k(3k+6)^2$. Por otro lado, sabemos que para cada pareja existen n caminos de longitud 2. Si añadimos los que empiezan y terminan en el mismo vértice (yendo y volviendo necesariamente por la misma arista) tenemos $12k(12k-1)n+12k(3k+6)$. Por tanto,

$$12k(3k+6)^2 = 12k(12k-1)n + 12k(3k+6),$$

o lo que es lo mismo,

$$9k^2 + (33-12n)k + (30+n) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a nuestra hipótesis inicial, pues cualquier grafo con $12k$ vértices y $3k+6$ aristas confluyendo en cada vértice que verifique esa ecuación cumple también la condición sobre los caminos de longitud 2 entre parejas. Debemos dilucidar entonces qué valores naturales de n y de k cumplen esta ecuación, puesto que nos darán la solución al problema.

En primer lugar, hagamos el cambio de variable $x=3k$, resultando la ecuación

$$x^2 + (11-4n)x + (30+n) = 0.$$

Sabemos que tendrá solución natural en x (de hecho, alguna solución deberá ser múltiplo de 3). Sea s dicha solución. Por la regla de Ruffini sabemos que $s|30+n$. Sea pues $30+n=ds$. Si hacemos $x=s$ en nuestra ecuación en x y despejamos sabiendo que $s\neq 0$, llegamos a que

$$s+d-4ds+131=0.$$

Esta nueva ecuación en s y d es simétrica; siempre que $(s, d) = (a, b)$ sea una solución, también lo será $(s, d) = (b, a)$. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s \leq d$. Si despejamos s en función de d, obtenemos que

$$s = \frac{131 + d}{4d - 1}.$$

Evidentemente, $s \geq 1$, con lo que despejando d, $d \leq 44$. De hecho, $(s, d) = (1, 44)$ es una solución, siéndolo por consiguiente también $(s, d) = (44, 1)$.

Ya hemos cubierto el caso en el que $s = 1$, lo que nos permite eliminar varios valores de d. En efecto, si imponemos que $s \geq 2$, se debe tener que $d \leq 19$, sucediendo nuevamente que $(s, d) = (2, 19)$ y $(s, d) = (19, 2)$ son soluciones.

Si seguimos buscando soluciones así, obtenemos rápidamente un nuevo par, $(s, d) = (4, 9)$ y $(s, d) = (9, 4)$, y llegando hasta $s = 6$ (en donde ya se debería tener que $d < 6$) damos por terminada la búsqueda sin conseguir ninguna pareja más de soluciones.

Recapitulemos pues. Hemos obtenido 6 soluciones distintas. Debemos recordar que s era una solución a la ecuación planteada en x, luego debía ser un múltiplo de 3. De todas las obtenidas, sólo $(s, d) = (9, 4)$ lo cumple. Para esos valores, es ya fácil calcular k y n. Concretamente, $k = 9/3 = 3$ y $n = 36 - 30 = 6$. En conclusión, sólo existe una solución a nuestra ecuación originaria en k y n. En términos del enunciado del problema, el pueblo tiene 36 habitantes, todo el mundo conoce a 15 y para cualquier pareja de vecinos, hay otros 6 que conocen a los dos. $\square$